Penerapan Kombinatorial dalam Perhitungan Koefisien Ekspansi Multinomial

Johann Christian Kandani - 13521138[1]
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
[1]*13521138@mahasiswa.itb.ac.id*

***Abstrak*—Ekspansi multinomial memiliki beberapa penggunaan dalam bidang matematika, seperti pada distribusi multinomial dalam perhitungan probabilitas. Ekspansi multinomial merupakan perhitungan yang cukup sulit jika dilakukan dengan operasi aljabar biasa, namun terdapat beberapa metode yang dapat memudahkan ekspansi multinomial dengan penerapan kombinatorial. Perhitungan koefisien ekspansi multinomial dapat dilakukan tanpa harus melakukan perkalian aljabar ataupun melakukan perhitungan berulang dengan ekspansi binomial, sehingga mempersingkat dan mempermudah ekspansi multinomial.**

***Kata kunci*—Aljabar, Ekspansi multinomial, Koefisien ekspansi multinomial, Kombinatorial.**

I. PENDAHULUAN

Ekspansi multinomial memiliki banyak penerapan dalam perhitungan, seperti menentukan persamaan distribusi multinomial dalam bidang probabilitas. Ekspansi multinomial dapat dilakukan dengan beberapa cara, seperti perkalian aljabar berulang atau dengan menghitung koefisien suku-suku hasil ekspansi multinomial. Perhitungan koefisien suku-suku hasil ekspansi multinomial dapat menggunakan teorema-teorema dasar kombinatorial. Perhitungan koefisien ekspansi multinomial juga memungkinkan perhitungan koefisien suatu suku ekspansi multinomial tanpa harus terlebih dahulu melakukan ekspansi secara keseluruhan.

Kasus khusus dari ekspansi multinomial adalah ekspansi binomial (ekspansi dengan dua suku). Ekspansi binomial dapat dijadikan sebagai dasar dalam memperluas ekspansi binomial menjadi ekspansi multinomial. Namun penggunaan ekspansi binomial berulang akan menjadi rumit dalam menghitung ekspansi multinomial dengan suku banyak.

Selain memudahkan perhitungan, penerapan kombinatorial pada perhitungan koefisien ekspansi multinomial menunjukkan kaitan operasi penjumlahan kombinasi dan permutasi berulang.

Dalam makalah ini, penulis akan membahas dekomposisi suku ekspansi multinomial dan penerapan kombinatorial dalam menghitung koefisien dari suku tersebut. Selain penerapan kombinatorial, akan dibahas juga penyederhanaan dari hasil perhitungan koefisien dengan ekspansi binomial berulang dalam perhitungan koefisien ekspansi multinomial.

II. LANDASAN TEORI

A. Aljabar

Aljabar adalah cabang matematika yang mempelajari penggunaan simbol dan operasi-operasi yang digunakan untuk memanipulasi simbol-simbol tersebut. [1] Ekspresi aljabar adalah ekspresi yang dibentuk dari simbol-simbol aljabar yang digabungkan dengan operasi penjumlahan, perkalian, dan pemangkatan bilangan rasional. [2]

B. Ekspansi Multinomial

Ekspresi aljabar yang dibentuk dari dua atau lebih suku (simbol aljabar) disebut multinomial (atau polinomial). Ekspansi Multinomial adalah hasil pemangkatan bilangan bulat positif dari sebuah ekspresi multinomial. [3]

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n = \sum_{\substack{n_1, n_2, \ldots, n_k \geq 0 \\ n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n}} \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}\, a_1^{n_1}\, a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k}, \tag{1}$$

Gambar 1. Persamaan ekspansi multinomial
(Sumber: https://mathworld.wolfram.com/MultinomialSeries.html, diakses pada 11 Desember 2022)

C. Kombinatorial

Kombinatorial adalah cabang matematika yang mempelajari cara berhitung atau enumerasi suatu himpunan elemen berdasarkan relasi yang mendefinisikan hubungan satu elemen dengan yang lain. [4] Dalam kombinatorial, terdapat beberapa teori-teori dan kaidah dasar, yaitu:

1. Kaidah Dasar Menghitung
   a. Kaidah penjumlahan (rule of sum)
      Jika terdapat $n(A)$ kemungkinan cara A terbentuk, dan terdapat $n(B)$ kemungkinan cara B terbentuk, maka banyak kemungkinan A *atau* B terbentuk adalah sebanyak $n(A) + n(B)$. Secara umum, terdapat $n(A) + n(B) + n(C)$ kemungkinan A *atau* B *atau* C terbentuk, dan seterusnya.

b. Kaidah perkalian (rule of product)
Jika terdapat $n(A)$ kemungkinan cara A terbentuk, dan terdapat $n(B)$ kemungkinan cara B terbentuk, maka banyak kemungkinan A *dan* B terbentuk adalah sebanyak $n(A) \times n(B)$. Secara umum, terdapat $n(A) \times n(B) \times n(C)$ kemungkinan A *dan* B *dan* C terbentuk, dan seterusnya.

2. Permutasi
Permutasi *r* dari *n* elemen adalah jumlah kemungkinan pembentukan urutan *r* objek yang berasal dari kumpulan *n* objek yang berbeda-beda. Permutasi *r* dari *n* umumnya dinotasikan dengan

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)\cdots(n-r+1) \tag{2}$$

3. Kombinasi
Kombinasi *r* dari *n* elemen adalah jumlah kemungkinan pembentukan *r* objek yang berasal dari kumpulan *n* objek yang berbeda-beda tanpa memerhatikan urutannya. Kombinasi *r* dari *n* umumnya dinotasikan dengan

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = n(n-1)\cdots(n-r+1)/r! \tag{3}$$

4. Permutasi dengan Elemen Berulang
Jumlah kemungkinan pembentukan urutan k kategori objek yang berbeda-beda, dengan masing-masing kategori memiliki elemen sebanyak $n_1, n_2, n_3, \cdots, n_k$ yang berasal dari kumpulan n objek dinotasikan dengan permutasi berulang dalam bentuk

$$P(n; n_1, n_2, n_3, \cdots, n_k) = \frac{P(n,n)}{n_1!\,n_2!\,n_3!\cdots n_k!} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\cdots n_k!} \tag{4}$$

yang memenuhi $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k = n$.

5. Kombinasi dengan Pengulangan
Jumlah kemungkinan pembentukan r objek yang berasal dari kumpulan n objek berbeda-beda A, dengan pemilihan setiap objek dari A dapat dilakukan lebih dari satu kali dinotasikan dalam bentuk

$$C(n+r-1, r) = C(n+r-1, n-1) = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!} \tag{5}$$

Pernyataan tersebut juga setara dengan "jumlah penyelesaian bilangan bulat tidak negatif dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = r$."

[5], [6], [7], [8]

D. Teorema Binomial

Teorema binomial menyatakan bahwa

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-k} y^k$$
$$= \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n \tag{6}$$

Dan koefisien suku $x^a y^b$ hasil ekspansi haruslah dalam bentuk $x^{n-k} y^k$, sehingga koefisien suku tersebut adalah $\binom{n}{a}$ atau $\binom{n}{b}$. [7], [8]

III. METODE PENERAPAN KOMBINATORIAL PADA SUKU-SUKU EKSPANSI MULTINOMIAL

A. Dekomposisi dan Pengelompokan Suku Ekspansi Multinomial

Ekspansi multinomial dapat dituliskan dalam bentuk perkalian faktor-faktor sebagai

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n$$
$$= \underbrace{(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \times \cdots \times (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)}_{(n\ faktor)} \tag{7}$$

Sehingga, hasil perkalian faktor-faktor pada (7) menghasilkan ekspresi

$$\underbrace{a_1 a_1 \cdots a_1}_{n\ suku} + \left(\underbrace{a_1 a_1 \cdots a_2}_{n\ suku} + \cdots + \underbrace{a_1 a_2 \cdots a_1}_{n\ suku} + \underbrace{a_2 a_1 \cdots a_1}_{n\ suku} \right)$$
$$+ \left(\underbrace{a_1 a_1 \cdots a_3}_{n\ suku} + \cdots + \underbrace{a_3 a_1 \cdots a_1}_{n\ suku} \right) + \cdots + \underbrace{a_k a_k \cdots a_k}_{n\ suku}$$

Yang dapat dinyatakan dalam persamaan

$$a_1 a_1 \cdots a_1 + a_1 a_1 \cdots a_2 + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_1 + a_2 a_1 \cdots a_1$$
$$+ a_1 a_1 \cdots a_3 + \cdots + a_3 a_1 \cdots a_1 + \cdots + a_k a_k \cdots a_k$$
$$= c_1 a_1^n a_2^0 \cdots a_k^0 + c_2 a_1^{n-1} a_2^1 \cdots a_k^0$$
$$+ c_3 a_1^{n-1} a_2^0 a_3^1 \cdots a_0^k + \cdots + c_1 a_1^0 a_2^0 \cdots a_k^n \tag{8}$$

Dengan c_i menyatakan koefisien dari suku ke-*i*.

Pengelompokan suku $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_2}$ hasil ekspansi merupakan bentuk *permutasi dengan elemen berulang*. Koefisien suku hasil ekspansi merupakan banyak kemungkinan pembentukan urutan k suku dengan masing-masing suku berasal dari perkalian $n_1, n_2, n_3, \cdots, n_k$ faktor. Sehingga, koefisien suku $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k}$ merupakan hasil perhitungan permutasi

$$P(n; n_1, n_2, n_3, \cdots, n_k)$$

Atau dalam bentuk perkalian

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\cdots n_k!}$$

Yang memenuhi

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k$$

Nilai tersebut kemudian dapat disulihkan menjadi koefisien-koefisien persamaan hasil ekspansi (8), menghasilkan suku hasil ekspansi

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\cdots n_k!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k}$$

Yang kemudian dapat dinyatakan dalam bentuk penjumlahan pada (1).

B. Penerapan Koefisien Binomial Berulang

Perhitungan koefisien ekspansi multinomial juga dapat dilakukan dengan perhitungan koefisien binomial yang dilakukan berulang kali. Sebuah multinomial m dapat dipandang sebagai binomial yang terdiri dari suatu suku dan suku lain yang merupakan multinomial

$$m = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$$

$$m = \Big(a_1 + \big(a_2 + (\cdots + (a_{k-1} + a_k)\cdots)\big)\Big) \tag{9}$$

Yang diekspansi menjadi

$$m^n = \Big(a_1 + \big(a_2 + (\cdots + (a_{k-1} + a_k)\cdots)\big)\Big)^n \tag{10}$$

Dengan multinomial $\big(a_2 + (\cdots + (a_{k-1} + a_k)\cdots)\big)$ dari (9) dapat disubstitusikan sebagai m_1 dan dengan mengulang pola yang sama dapat dihasilkan

$$\begin{gathered} m = (a_1 + m_1) \\ m_1 = (a_2 + m_2) \\ m_2 = (a_3 + m_3) \\ \vdots \\ m_{k-3} = (a_{k-2} + m_{k-2}) \\ m_{k-2} = (a_{k-1} + a_k) \end{gathered}$$

Perhitungan koefisien dari suku $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k}$ dari ekspansi m^n pada (10) dapat dilakukan dengan menghitung koefisien $a_1^{n_1} m_1^{n-n_1}$, kemudian menghitung koefisien $a_2^{n_2} a_3^{n_3} \cdots a_k^{n_k}$ dari m_1 dengan cara yang sama

$$\binom{n}{n_1} a_1^{n_1} m_1^{n-n_1}$$

Dengan menghitung koefisien suku $a_2^{n_2} a_3^{n_3} \cdots a_k^{n_k}$ pada multinomial $m_1, m_2, m_3, \cdots$ koefisien diekspansi menjadi bentuk

$$\begin{gathered} \binom{n}{n_1} a_1^{n_1} \left(\binom{n-n_1}{n_2} a_2^{n_2} m_2^{n-n_1-n_2} \right) \\ \binom{n}{n_1} a_1^{n_1} \left(\binom{n-n_1}{n_2} a_2^{n_2} \left(\binom{n-n_1-n_2}{n_3} a_3^{n_3} m_3^{n-n_1-n_2-n_3} \right) \right) \\ \vdots \end{gathered}$$

Hingga ekspansi m_{k-2} yang menghasilkan suku $a_{k-1}^{n_{k-1}} a_k^{n_k}$

$$\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-2}}{n_{k-1}} a_{k-1}^{n_{k-1}} a_k^{n_k}$$

Karena $n = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k$,

$$\begin{aligned} &\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-2}}{n_{k-1}} a_{k-1}^{n_{k-1}} a_k^{n_k} \\ &= \binom{n_{k-1}+n_k}{n_{k-1}} a_{k-1}^{n_{k-1}} a_k^{n_k} \end{aligned}$$

Sehingga suku-suku yang dihasilkan dengan koefisien binomial berulang menjadi bentuk

$$\binom{n}{n_1} a_1^{n_1} \left(\binom{n-n_1}{n_2} a_2^{n_2} \left(\cdots \left(\binom{n_{k-1}+n_k}{n_{k-1}} a_{k-1}^{n_{k-1}} a_k^{n_k} \right) \right) \right)$$

$$= \binom{n}{n_1} a_1^{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} a_2^{n_2} \cdots \binom{n_{k-1}+n_k}{n_{k-1}} a_{k-1}^{n_{k-1}} a_k^{n_k}$$

$$= \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \cdots \binom{n_{k-1}+n_k}{n_{k-1}} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_{k-1}^{n_{k-1}} a_k^{n_k}$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!\,(n-n_1-n_2)!} \cdots \frac{(n_{k-1}+n_k)!}{n_{k-1}!\,n_k!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k}$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!\,(n-n_1-n_2)!} \cdots \frac{(n-\cdots-n_{k-2})!}{n_{k-1}!\,n_k!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k}$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,\cancel{(n-n_1)!}} \frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\,\cancel{(n-n_1-n_2)!}} \cdots \frac{\cancel{(n-\cdots-n_{k-2})!}}{n_{k-1}!\,n_k!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k}$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\cdots n_k!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k}$$

Sehingga didapatkan koefisien dari suku $a_2^{n_2} a_3^{n_3} \cdots a_k^{n_k}$ melalui perhitungan koefisien binomial berulang adalah

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\cdots n_k!}$$

IV. Catatan Tambahan Terkait Ekspansi Multinomial dan Kaitan Perhitungan Koefisien dengan Hasil Operasi Penjumlahan Kombinasi dan Permutasi

A. Jumlah Suku Ekspansi Multinomial

Jumlah suku hasil ekspansi multinomial $(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n$ dapat dihitung menggunakan *kombinasi dengan pengulangan*. Salah satu alternatif merepresentasikan penggunaan kombinasi dengan pengulangan adalah dengan mengamati bentuk suku $ca_1^{n_1}a_2^{n_2}\cdots a_k^{n_2}$. Suatu suku terbentuk dari hasil perkalian n faktor ekspansi sehingga memenuhi persamaan $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k = n$. Oleh karena itu, diperoleh jumlah suku ekspansi multinomial dengan n sebagai pangkat multinomial dan k sebagai jumlah suku multinomial dapat diperoleh dengan

$$C(n+k-1,k) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}$$

B. Kaitan Perhitungan Koefisien Multinomial dengan Hasil Operasi Penjumlahan Kombinasi dan Permutasi

Koefisien ekspansi multinomial $(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n$ menghasilkan suku-suku $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_k!}a_1^{n_1}a_2^{n_2}\cdots a_k^{n_k}$. suatu suku dapat dibentuk sebagai hasil penjumlahan suku-suku $(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^{n-1}$ yang dikalikan dengan sebuah suku dari faktor $(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-1)!}{(n_1-1)!\,n_2!\cdots n_k!}a_1^{(n_1-1)}a_2^{n_2}\cdots a_k^{n_k}\cdot a_1 \\
&+\frac{(n-1)!}{n_1!\,(n_2-1)!\cdots n_k!}a_1^{n_1}a_2^{(n_2-1)}\cdots a_k^{n_k}\cdot a_2 \\
&\qquad\vdots \\
&+\frac{(n-1)!}{n_1!\,n_2!\cdots(n_k-1)!}a_1^{n_1}a_2^{n_2}\cdots a_k^{(n_k-1)}\cdot a_k \\
&=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\cdots n_k!}a_1^{n_1}a_2^{n_2}\cdots a_k^{n_k}
\end{aligned}$$

Setelah suku multinomial pada ruas kiri dan kanan persamaan dibuat sama, suku multinomial dapat dihilangkan dan yang tersisa adalah penjumlahan koefisien-koefisien dalam bentuk penjumlahan permutasi berulang

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-1)!}{(n_1-1)!\,n_2!\cdots n_k!} \\
&+\frac{(n-1)!}{n_1!\,(n_2-1)!\cdots n_k!} \\
&\qquad\vdots \\
&+\frac{(n-1)!}{n_1!\,n_2!\cdots(n_k-1)!} \\
&=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\cdots n_k!}
\end{aligned}$$

Yang dapat dibuat ke dalam bentuk permutasi berulang

$$\begin{aligned}
&P(n-1; n_1-1, n_2, \cdots, n_k) \\
&+P(n-1; n_1, n_2-1, \cdots, n_k) \\
&\qquad\vdots \\
&+P(n; n_1, n_2, \cdots, n_k-1) \\
&= P(n; n_1, n_2, n_3, \cdots, n_k)
\end{aligned}$$

V. Simpulan

Penerapan kombinatorial dalam menghitung koefisien ekspansi multinomial dapat memudahkan situasi-situasi ketika hanya dibutuhkan sebuah suku hasil ekspansi multinomial dan juga ketika dibutuhkan ekspansi multinomial dengan pangkat besar seperti dalam menghitung probabilitas dengan distribusi multinom. Ekspansi multinom juga dapat digunakan dalam menghitung ekspansi polinomial. Penerapan kombinatorial dalam pembahasan pada bagian sebelumnya juga menunjukkan kemungkinan representasi yang beragam dalam mengaplikasikan kombinatorial. Selain itu, perhitungan kaitan yang ditunjukkan perhitungan koefisien dengan hasil operasi penjumlahan permutasi berulang merupakan hal yang tidak diperkirakan oleh penulis sebelum membahas topik ini. Selain sebuah persoalan dapat direpresentasikan menjadi beragam model yang dapat diselesaikan dengan kombinatorial, beragam model kombinatorial dapat direpresentasikan dari sebuah persoalan abstrak juga. Sebagai catatan tambahan, perhitungan koefisien multinomial dengan kombinatorial dapat menghasilkan model Segitiga Pascal secara umum sebagaimana ekspansi multinomial merupakan model ekspansi binomial secara umum.

VI. Ucapan Terima Kasih

Penulis menyampaikan ucapan syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas anugerah-Nya yang memungkinkan penulis menyusun makalah ini hingga selesai. Penulis juga berterima kasih kepada Ibu Fariska Zakhralativa Ruskanda, S.T., M.T. selaku dosen pengampu mata kuliah IF2120 Matematika Diskrit Semester Ganjil Tahun 2022/2023 kelas 02, yang telah memberikan pengetahuan dan menyediakan sarana belajar yang digunakan dalam penulisan makalah ini. Tugas makalah ini telah menjadi wadah menuangkan buah pikiran penulis mengenai topik ini dan telah memberi wawasan baru dalam bidang matematika diskrit serta menjadi pengalaman baru bagi penulis dalam pembuatan makalah ilmiah.

Referensi

[1] I. N. Herstein, dalam *Topics in Algebra*, 2 penyunt., John Wiley and Sons, 1975, p. 2.

[2] E. W. Weisstein, “Algebraic Expression,” MathWorld, [Online]. Available: https://mathworld.wolfram.com/AlgebraicExpression.html. [Diakses 11 Desember 2022].

[3] E. W. Weisstein, “Multinomial Series,” MathWorld, [Online]. Available: https://mathworld.wolfram.com/MultinomialSeries.html. [Diakses 11 Desember 2022].

[4] E. W. Weisstein, “Combinatorics,” MathWorld, [Online]. Available: https://mathworld.wolfram.com/Combinatorics.html. [Diakses 11 Desember 2022].

[5] J. Y. Halpern, “Computer Science 280: Discrete Structures - Week 6,” Cornell University, [Online]. Available:

http://www.cs.cornell.edu/courses/cs280/2004fa/280wk6_x4.pdf. [Diakses 11 Desember 2022].

[6] R. Munir, “Bahan Kuliah IF2120 Matematika Diskrit - Kombinatorial (Bagian 1),” Institut Teknologi Bandung, [Online]. Available: https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Kombinatorial-2020-Bagian1.pdf. [Diakses 11 Desember 2022].

[7] R. Munir, “Bahan Kuliah IF2120 Matematika Diskrit - Kombinatorial (Bagian 2),” Institut Teknologi Bandung, [Online]. Available: https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Kombinatorial-2020-Bagian2.pdf. [Diakses 11 Desember 2022].

[8] M. A. Lerma, “Notes on Discrete Mathematics - Combinatorics,” Northwestern University, [Online]. Available: https://sites.math.northwestern.edu/~mlerma/courses/cs310-05s/notes/dm-gcomb. [Diakses 11 Desember 2022].

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 12 Desember 2020

Johann Christian Kandani
13521138